# Un défi pour les mathématiciens: Tarifer l'eau de manière équitable

Étienne Billette de Villemeur[1] Justin Leroux[2]

[1]Université de Lille (EQUIPPE), France
Chaire d'économie Toussaint Louverture, Haïti

[2]HEC Montréal (CIRANO & CIRPÉE), Canada

8 décembre 2012

Mathématiques de la planète Terre, 2013

# Contexte

La tarification de l'eau est une question importante de société:

- l'eau est un bien essentiel
- la distribution (collecte, traitement, transport) d'une eau de qualité engendre des coûts importants en infrastructures

Nécessité de tarifer de manière équitable:

- garantir un accès abordable pour les usagers démunis (équité verticale)
- s'assurer que les usagers consciencieux ne fassent pas indûment les frais de consommateurs irresponsables (équité horizontale)
- favoriser la conservation de la ressource et une gestion pérenne des infrastructures (équité intergénérationnelle)

# Les pratiques en vigueur

Les "meilleures pratiques" en vigueur sont critiquables:

- pas toujours rigoureuses
- évoluent au cours du temps

# Le cas de l'eau "gratuite"

De nombreuses régions développées ne disposent pas d'une tarification volumétrique (par ex., certains comtés de Californie, du Royaume Uni, du Québec, etc.)

- Argument d'accessibilité
- Implique un financement des services d'eau par l'impôt municipal ou général

# Peu propice à la satisfaction des critères d'équité:

- Manque d'équité verticale:
  - une certaine progressivité, mais aucune garantie que le niveau de progressivité voulu soit atteint:
  - recours aux aides sociales nécessaire
- Manque d'équité horizontale:
  - les petits usagers subventionnent les grandes consommations
- Manque d'équité intergénérationnelle:
  - financement des infrastructures vulnérable aux urgences politiques du moment (pas d'objectif d'autofinancement)
  - peu propice à la préservation de la resource (aucun signal de coût ou de rareté)

# Problème complèxe d'allocation des coûts (*cost sharing*)

Nécessite de tenir compte de nombreuses variables:

- profils de consommation des usagers
- variables non directement liées à la consommation d'eau (par ex: le revenu)
- caractéristiques dont on ne souhaite pas tenir les individus responsables (par ex: les besoins en eau)

**Ce que les mathématiques ont à offrir:**

Un cadre rigoureux qui permet d'incorporer les notions (**philosophiques**) d'équité et de responsabilité à un problème (**économique**) de partage de coûts pour répondre à un important enjeu (**social**).

# Structure de la présentation

- Modélisation du problème de tarification
- Réduction à un problème d'équation fonctionnelle
- Résolution des équations de Jensen et de Cauchy
- Conclusion

# Modélisation du problème de financement

Population de $n$ agents. Chaque agent $i \in \{1, .., n\}$ :

- consomme $q_i$ unités d'eau
- paye un montant $t_i$

La tarification doit financer le coût de desservir la demande totale de la population:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = C(Q), \qquad \text{avec } Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

où $C$ est une fonction croissante vérifiant $C(0) = 0$

# Modélisation des préférences

- $\bar{q}_i$ - besoins de l'individu $i$
- $r_i$ - revenu de l'individu $i$

Le bien-être de l'individu $i$ :

$$u\left(\frac{q_i - \bar{q}_i}{\bar{q}_i}\right) + r_i - t_i$$

La fonction $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est croissante, concave, et satisfait les conditions d'Inada:

$$u(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} u'(x) = +\infty$$

# Définition du champs de responsabilité

"Personne n'est responsable de ses besoins essentiels."

Formellement, le schéma de tarification doit satisfaire les propriétés suivantes:

- la valeur de $\bar{q}_i$ ne doit pas déterminer le niveau de bien être final
- les individus doivent être tenus responsables uniquement de leur consommation discrétionnaire: $\frac{q_i - \bar{q}_i}{\bar{q}_i}$

# Approche axiomatique

Des individus aux besoins identiques devraient se voir imposer des barèmes tarifaires identiques.

**Axiome: Barèmes identiques pour besoins identiques (BIBI)**

Les barèmes de tarification, $q_i \mapsto t_i$ et $q_j \mapsto t_j$, doivent être identiques dès que $\bar{q}_i = \bar{q}_j$.

**Note:** Cet axiome implique $[q_i = q_j \implies t_i = t_j]$ lorsque $i$ et $j$ ont des besoins égaux.

L'axiome BIBI est trop exigeant en présence d'externalités:

**Proposition:** *Il n'existe pas de règle de tarification, $t$, satisfaisant BIBI si la fonction de coûts, $C$, n'est pas linéaire.*

Soient $\bar{q}, q, q' \in \mathbb{R}_+$ tels que $\bar{q} \leq q < q'$. Considérons un profil de besoins identiques:

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = \bar{q}.$$

Par BIBI et par la contrainte d'autofinancement:

$$\begin{aligned} t_1(q, q) &= t_2(q, q) = \frac{C(2q)}{2} \quad \text{et} \\ t_1(q', q') &= t_2(q', q') = \frac{C(2q')}{2} \end{aligned}$$

Donc,

$$t_1(q', q') - t_1(q, q) = \frac{C(2q') - C(2q)}{2}$$

De plus, par BIBI, on a $t_1(q, q) = t_1(q, q')$, donc:

$$t_1(q', q') - t_1(q, q') = \frac{C(2q') - C(2q)}{2} \qquad (1)$$

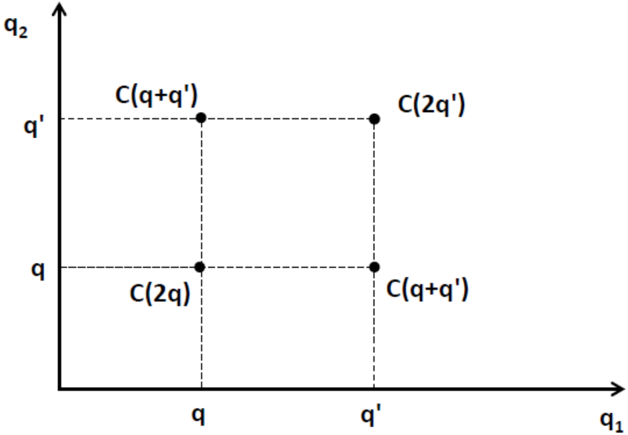
# Démonstration ($n = 2$)

De plus, on a par la contrainte d'autofinancement et BIBI, respectivement:

$$\begin{array}{lrcl} & & & t_1(q', q') + t_2(q', q') - \left[t_1(q, q') + t_2(q, q')\right] \\ & & = & C(2q') - C(q + q') \\ \text{et} & t_2(q', q') & = & t_2(q, q') \end{array}$$

D'où

$$t_1(q', q') - t_1(q, q') = C(2q') - C(q + q') \tag{2}$$




$$t_1\left(q', q'\right) - t_1\left(q, q'\right) = C\left(2q'\right) - C\left(q + q'\right)$$

$$t_1\left(q', q'\right) - t_1\left(q, q'\right) = \frac{C\left(2q'\right) - C\left(2q\right)}{2}$$

# Démonstration ($n = 2$)

Par (1) et (2),

$$C\left(2q'\right) - C\left(q + q'\right) = \frac{C\left(2q'\right) - C\left(2q\right)}{2}$$

soit

$$C\left(q + q'\right) = \frac{C\left(2q\right) + C\left(2q'\right)}{2}$$

Il s'agit d'une équation fonctionnelle, dont l'inconnue est $C$, et qui doit être vérifiée pour tous $q, q' \in [\bar{q}, +\infty[$ et donc, comme $\bar{q}$ a été choisi de manière arbitraire, pour tous $q, q' \in \mathbb{R}_+$.

# L'équation de Jensen

En procédant au changement de variable $C \equiv f$, $x = 2q$ et $y = 2q'$, on retrouve l'équation de Jensen:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}_+$$

**Résolution:** En choisissant $x' = x + y$, et $y' = 0$, on obtient

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x'+y'}{2}\right) = \frac{f(x+y)}{2} + \frac{f(0)}{2}$$

Or, comme $f(0) = C(0) = 0$, on obtient que $f$ satisfait l'équation de Jensen si et seulement si elle satisfait:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}_+$$

qui est une équation de Cauchy.

# L'équation simple de Cauchy (1821)

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}_+$$

**Résolution:** Par récurrence, on obtient

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$$

et en choisissant $x_k = x \ \forall k$, il s'ensuit que:

$$f(nx) = nf(x) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+ \text{ et tout } n \in \mathbb{N}$$

# L'équation simple de Cauchy (1821)

Si on écrit $x = (m/n)\,z$, alors

$$nx = mz.$$

Donc,

$$f(nx) = f(mz),$$

et

$$nf(x) = mf(z).$$

Par conséquent:

$$f\left(\frac{m}{n}z\right) = \frac{m}{n}f(z).$$

En prenant $z = 1$ et en notant $f(1) = c$, on obtient que:

$$f(x) = cx \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{Q}_+.$$

# Pour étendre la solution à $\mathbb{R}_+$

Si on suppose que $f$ est continue en un seul point, $x_0 > 0$ (Darboux, 1875):

$$\lim_{z \longrightarrow x_0} f(t) = f(x_0).$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{u \longrightarrow x} f(u) &= \lim_{u - x + x_0 \longrightarrow x_0} f[(u - x + x_0) + (x - x_0)] \\
&= \lim_{z \longrightarrow x_0} f[z + (x - x_0)] \\
&= \lim_{z \longrightarrow x_0} f(z) + f(x - x_0) \\
&= f(x_0) + f(x - x_0) \\
&= f(x_0 + x - x_0) \\
&= f(x) \qquad \square
\end{aligned}$$

**Théorème** Une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, continue en un point $x_0$, satisfait

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}_+$$

si et seulement si:

$$f(x) = cx \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

# Autres domaines d'applications

Nous avons vu un exemple d'applications d'équations fonctionnelles. Les applications abondent, et dépassent de loin la tarification de l'eau. Parmi d'autres, on compte:

- la tarification de services publics autres que l'eau (transport, santé, éducation, etc.)
- le partage de coûts au sein d'entreprises privées ou semi privées (aéroports, centres d'appels, etc.)
- l'établissement de transferts internationaux face au réchauffement climatique
- la détermination de la progressivité de l'impôt sur le revenu...

Autrement dit, tout **examen normatif basé sur une approche axiomatique** se prête à la résolution d'équations fonctionnelles.

# La "Bible" des équations fonctionnelles

Une référence à ne pas manquer:

- J. Aczél, "Lectures on Functional Equations and Their Applications", Dover Publications, 1966.

János Aczél (né en 1924): Pofesseur émérite à l'Université de Waterloo, Fellow de la Société Royale Canadienne.